U sistemu Maxwellovih jednačina

$$\begin{aligned} div\mathbf{D} &= \rho, & div\mathbf{B} &= 0, \\ rot\mathbf{E} &= -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, & rot\mathbf{H} &= \mathbf{j} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}, \end{aligned} \tag{1}$$

ima više nepoznatih nego što ima jednačina, stoga njima moramo dodati izvesne dopunske jednačine, koje bi sa Maxwellovim jednačinama činile potpun sistem jednačina elektrodinamike. Ovim jednačinama treba da budu izraženi izvesni <u>dopunski uslovi o električnoj i magnetnoj polarizaciji kao i o provodljivosti sredine</u>.

1. Elektrodinamičke jednačine sredine

Oblik ovih jednačina zavisi od prirode i stanja sredine kao i od samog elektromagnetnog polja i predstavljaju bitne karakteristike sredine. To su jednačine koje karakterišu sredinu i nazivaju se elektrodinamičke jednačine sredine[1]. Te jednačine su oblika

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{D}(\mathbf{E},\mathbf{B}) \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}(\mathbf{E},\mathbf{B}) \\ \mathbf{j} &= \mathbf{j}(\mathbf{E},\mathbf{B}) \end{aligned} \tag{2}$$

koje se dobijaju bilo empirijski, bilo metodama teorijske fizike.

U elektrostatičkom, odnosno magnetostatičkom polju supstancijalne jednačine za neprovodnu sredinu imaju jednostavan oblik:

$$\begin{aligned} \rho &= 0 \\ \mathbf{j} &= 0 \\ \mathbf{D} &= \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mu_0 \mu \mathbf{H} \end{aligned} \tag{3}$$

gde su ε i μ konstante. Nazivamo ih relativnom dielektričnom propustljivošću sredine, odnosno relativnom magnetnom propustljivošću. Kao što vidimo, jednačine sredine (3) su linearne. Molekuli ovakvih sredina su najčešće elektroneutralni, pa se makroskopska gustina struje i naelektrisanja svode na gustine naelektrisanja i struje slobodnih naelektrisanja, ali i one su jednake nuli. Sredine ko dkojih prethodne formule važe i u sporo promenljivom elektromagnetnom polju

$$\begin{aligned} \rho &= 0 \\ \mathbf{j} &= 0 \\ \mathbf{D}(\mathbf{r},t) &= \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{r},t) \\ \mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= \mu_0 \mu \mathbf{H}(\mathbf{r},t) \end{aligned} \tag{4}$$

zvaćemo Maksvelovi dielektrici.

Ukoliko se provodna sredina nalazi u statičkom polju onda je

$$\begin{aligned} \rho &= 0 \\ \mathbf{j} &= \sigma \mathbf{E} \\ \mathbf{D} &= \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mu_0 \mu \mathbf{H} \end{aligned} \tag{5}$$

gde je σ provodnost sredine. Prva jednačina je posledica elektroneutralnosti sredine. Druga jednačina je Omov zakon koji daje vezu između makroskopske gustine struje i električnog polja.

[1] Nazivaju se i supstancijalnim ili materijalnim jednačinama.

Ukoliko jednačine (5) važe i za promenljiva polja, onda se takva sredina naziva Maksvelov provodnik. Provodna sredina ne dozvoljava postojanje zapreminske gustine naelektrisanja (pokazati ovo tvrđenje polazeći od jednačine kontinuiteta i Omovog zakona).

Ako je sredina anizotropna[2] onda su veličine ε, μ, σ tenzori dielektrične propustljivosti, magnetne propustljivosti odnosno provodnosti. Jednačine (5) postaju

$$\begin{aligned} j_i(\mathbf{r},t) &= \sigma_{ij} E_j(\mathbf{r},t) \\ D_i(\mathbf{r},t) &= \varepsilon_0 \varepsilon_{ij} E_j(\mathbf{r},t) \\ B_i(\mathbf{r},t) &= \mu_0 \mu_{ij} H_j(\mathbf{r},t) \end{aligned} \tag{6}$$

Prethodne jednačine su lokalne i simultane, tj. sredina je bez disperzije[3].

Elektrodinamička reakcija sredine, koju određuje polarizacija i magnetizacija, u trenutku t zavisi od polja i osobina sredine u ranijim trenutcima vremena. Ovakve sredine se nazivaju sredinama sa vremenskom disperzijom. Dakle, kod sredina sa vremenskom disperzijom veza između polarizacije, odnosno magnetizacije i polja je

$$\begin{aligned} P_i(\mathbf{r},t) &= \int_{-\infty}^{t} dt'\, f_{ij}(\mathbf{r},t,t') E_j(t',\mathbf{r}) \\ M_i(\mathbf{r},t) &= \int_{-\infty}^{t} dt\, g_{ij}(\mathbf{r},t,t') H_j(t',\mathbf{r}) \end{aligned} \tag{7}$$

gde su f_{ij} i g_{ij} funkcije koje zavise od sredine. Elektrodinamičke jednačine linearne sredine sa vremenskom disperzijom su

$$\begin{aligned} D_i(\mathbf{r},t) &= \int_{-\infty}^{t} dt'\, F_{ij}(\mathbf{r},t,t') E_j(t',\mathbf{r}) \\ B_i(\mathbf{r},t) &= \int_{-\infty}^{t} dt'\, G_{ij}(\mathbf{r},t,t') H_j(t',\mathbf{r}) \\ j_i(\mathbf{r},t) &= \int_{-\infty}^{t} dt'\, K_{ij}(\mathbf{r},t,t') E_j(t',\mathbf{r}) \end{aligned} \tag{8}$$

Tenzori $F_{ij}(\mathbf{r},t,t')$, $G_{ij}(\mathbf{r},t,t')$ i $K_{ij}(\mathbf{r},t,t')$ su u vezi sa tenzorima f_{ij} i g_{ij} i karakterišu sredinu. Ako je sredina stacionarna, tj. njene osobine se ne menjaju sa vremenom, jezgra linearnih operatora F_{ij}, G_{ij} i K_{ij} zavise od razlike $t-t'$ a ne od t i t' ponaosob. Za stacionarne sredine vrednosti jezgara integralnih operatora se ne menjaju pri vremenskim translacijama, tj.

$$F_{ij}(\mathbf{r},t+\tau,t'+\tau) = F_{ij}(\mathbf{r},t,t') \tag{9}$$

[2] Sredina je *izotropna* ako su karakteristike sredine iste u svim pravcima.

[3] Sredina bez *disperzije* je seredina čije karakteristike ne zavise od frekvencije i talasnog vektora elektromagnetnog polja.

za proizvoljno τ . Specijalno ako izaberemo $\tau = -t'$ dobijamo

$$F_{ij} = F_{ij}(\mathbf{r}, t - t') \tag{10}$$

Supstancijalne jednačine za stacionarne sredine sa vremenskom disperzijom su

$$\begin{aligned} D_i(\mathbf{r}, t) &= \int_{-\infty}^{t} dt' \, F_{ij}(\mathbf{r}, t - t') E_j(t', \mathbf{r}) \\ B_i(\mathbf{r}, t) &= \int_{-\infty}^{t} dt' \, G_{ij}(\mathbf{r}, t - t') H_j(t', \mathbf{r})) \\ j_i(\mathbf{r}, t) &= \int_{-\infty}^{t} dt' \, K_{ij}(\mathbf{r}, t - t') E_j(t', \mathbf{r}) \end{aligned} \tag{11}$$

Ukoliko npr. vrednost vektora električne indukcije u tački $\mathbf{r}$ zavisi od jačine polja u okolnim tačkama onda to nazivamo <u>prostornom disperzijom</u>. Vremenska disperzija, zbog konačnosti prostiranja elektromagnetne interakcije uvek prati prostornu disperziju. Dakle, za sredine sa <u>prostorno-vremenskom disperzijom</u> supstancijalne jednačine imaju sledeći oblik

$$\begin{aligned} D_i(\mathbf{r}, t) &= \int_{-\infty}^{t} dt' \int d^3r' \, F_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') E_j(t', \mathbf{r}') \\ B_i(\mathbf{r}, t) &= \int_{-\infty}^{t} dt' \int d^3r' \, K_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') H_j(t', \mathbf{r}') \\ j_i(\mathbf{r}, t) &= \int_{-\infty}^{t} dt' \int d^3r' \, G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') E_j(t', \mathbf{r}') \end{aligned} \tag{12}$$

Oveveze su linearne. Ako jezgra sva tri integralna operatora u prethodnim jednačinama zavise od razlike $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$, tj. ukoliko je

$$D_i(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{t} dt' \int d^3r \, F_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t, t') E_j(t', \mathbf{r}') \tag{13}$$

onda takve sredine nazivamo homogenim. Tenzor F_{ij} je translaciono invarijantan, tj.

$$F_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = F_{ij}(\mathbf{r} + \mathbf{a}, \mathbf{r}' + \mathbf{a}) \tag{14}$$

gde je $\mathbf{a}$ proizvoljan vector. Specijalno za $\mathbf{a} = -\mathbf{r}'$ sledi

$$F_{ij} = F_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \tag{15}$$

Sredina može, u opštem slučaju, biti nelinearna. To su sredine kod kojih veza između polarizacije, odnosno magnetizacije i polja nije linearna. Npr. sredine koje se nalaze u spoljašnjim jakim poljima su nelinearne. kod njih je npr. veza između polarizacije i električnog polja data sa

$$P_i = \varepsilon_0 \kappa_{ij} E_j + \varepsilon_0 \kappa_{ijk}^{(2)} E_j E_k + \varepsilon_0 \kappa_{ijkm}^{(3)} E_j E_k E_m + \dots \tag{16}$$

gde su κ_{ij} , $\kappa_{ijk}^{(2)}$ i $\kappa_{ijklm}^{(3)}$ koeficijenti. Ove veze mogu biti koplikovanije.

2. Električna i magnetna permeabilnost

Pri relativno slabim poljima u većini slučajeva *ukoliko je veća jačina električnog polja, utoliko je veće i usmeravanje dipola u pravcu električnih linija sila, te je utoliko veća i jačina električne polarizacije*

$$\mathbf{P}(\mathbf{r},t) = \varepsilon_0 \kappa \mathbf{E}(\mathbf{r},t) \,. \tag{17}$$

Ovde koeficijent κ je faktor srazmernosti, koji je neimenovana veličina, može zavisiti od položaja i vremena i naziva se *električna susceptibilnost*. *Linearna proporcionalnsot* između veličina $\mathbf{P}$ i $\mathbf{E}$ važi samo u slučaju:

- *slabog polja* (dok porastom jačine polja polarizacija može težiti saturaciji, a može nastati i jonizacija – proboj),
- *kolinearnost vektora* $\mathbf{P}$ i $\mathbf{E}$ važiće samo u slučaju *izotropne* sredine, a
- *lokalnost dejstva* znači da jačina električne polarizacije u nekoj tački *M* u trenutku t zavisi samo od jačine električnog polja u *istoj* tački *M* i u *istom* trenutku t.

Tada prema definiciji vektora električne indukcije imamo

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \varepsilon_0 \kappa \mathbf{E} = \varepsilon_0 (1+\kappa) \mathbf{E} \,, \tag{18}$$

čime smo eliminacijom veličine $\mathbf{P}$ našli vezu između $\mathbf{D}$ i $\mathbf{E}$, koju možemo napisati u obliku

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \,, \tag{19}$$

gde smo stavili

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r \,, \qquad \varepsilon_r = 1 + \kappa \,. \tag{20}$$

Ovako uvedena veličina ε naziva se *dielektrična konstanta* ili *električna permeabilnost,* a veličina ε_r *relativna dielektrična konstanta.* Prva veličina ε je imenovana, tj. ima dimenziju istu kao i ε_0, dok druga ε_r je neimenovana i bilo koja od ovih veličina karakteriše sredinu u pogledu sposobnosti polarizacije.

Na sličan način, iskustvo pokazuje da je pod istim uslovima često i *jačina magnetne polarizacije srazmerna jačini magnetnog polja, pa stoga i vektoru magnetne indukcije*

$$\mathbf{M}(\mathbf{r},t) = \chi \mathbf{H}(\mathbf{r},t) \,, \tag{21}$$

gde koeficijent χ zavisi od prirode sredine kao i od položaja i vremena i nativa se *magnetna susceptibilnost*. Tada je prema definiciji vektora magnetne indukcije

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} - \mathbf{M} = \frac{1}{\chi}\mathbf{M} \,, \tag{22}$$

a otuda

$$\mathbf{M}=\frac{\chi}{\mu_0(1+\chi)}\mathbf{B}\,, \tag{23}$$

odakle proizilazi

$$\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}\,, \tag{24}$$

gde je

$$\mu=\mu_0\mu_r, \qquad \mu_r=1+\chi\,. \tag{25}$$

Veličina μ naziva se *magnetna permeabilnost*, a μ_r *relativna magnetna permeabilnost*, pri čemu je takođe prva veličina imenovana, a druga neimenovana.

Najzad, postoji još jedna materijalna jednačina, koja karakteriše provodljivost sredine. *Ukoliko je veća jačina ukupnog električnog polja, utoliko je veća i pokretljivost slobodnih elektrona ili jona, te je utoliko veća i indukovana strujna gustina unutrašnjih slobodnih naelektrisanja*

$$\mathbf{j}_s(\mathbf{r},t)=\sigma\mathbf{E}_{uk}(\mathbf{r},t)\,, \tag{26}$$

gde faktor srazmernosti σ zavisi od prirode sredine kao i od položaja i vremena i naziva se *specifična provodljivost sredine.* Ukupno električno polje, pored električnog polja o kome smo do sada govorili i koje je određeno Maxwellovim jednačinama, može sadržavati i izvesno *dopusnko električno polje, koje nastaje pretvaranjem drugih vidova energije u električnu*. Takvo polje nastaje na pr. pri pretavaranju hemijske energije u električnu u galvanskom elementu ili pri pretavaranju toplotne energije u električnu u termoelementu i ovakvo dopunsko polje zvaćemo *strano električno polje,* a njegovu jačinu označimo sa $\mathbf{E}^{str}$. Tada je

$$\mathbf{E}_{uk}=\mathbf{E}+\mathbf{E}^{str}\,, \tag{27}$$

pa relacija (26) dobija oblik

$$\mathbf{j}_s=\sigma\left(\mathbf{E}+\mathbf{E}^{str}\right). \tag{28}$$

Ovako dobijene relacije (19), (24) i (28), koje važe samo pod navedenim uslovima i predstavljaju dopunske relacije elektrodinamike između jačina polja, vektora indukcije i strujne gustine

$$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E},\;\; \mathbf{B}=\mu\mathbf{H},\;\; \mathbf{j}_s=\sigma\left(\mathbf{E}+\mathbf{E}^{str}\right) \tag{29}$$

nazivaju se *materijalne jednačine* ili *jednačine stanja sredine*. One karakterišu sredinu u pogledu električne i magnetne polarizacije kao i električne provodljivosti i preko njih se uvode karakteristike sredine (ε,μ,σ) kao i strano električno polje. Ukoliko su sve ove veličine konstantne, tj. ako je sredina *homogena, izotropna i bez disperzije,* elektromagnetna polja u takvim sredinama su veoma slična elektromagnetim poljima u vakuumu i stoga ćemo ovakve sredine zvati *vakumu slične sredine.*

3. Složeniji slučajevi

U svim navedenim materijalnim jednačinama (29) implicitno su sadržani navedeni uslovi pod kojima ove jednačine važe. To možemo ilustrovati detaljnijom analizom jednačine $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \kappa \mathbf{E}$, prema kojoj je *vektor* $\mathbf{P}$ *u nekoj tački M u trenutku* t *kolinearan i linearno proporcionalan vektoru* $\mathbf{E}$ *u istoj tački i u istom trenutku*. Samo ako je sredina *izotropna*, uticaj električnog polja na polarizaciju je isti u svim pravcima, tako da se polarizacija sredine vrši uvek u pravcu linija sila električnog polja, tj. $\mathbf{P}$ je kolinearno sa $\mathbf{E}$. Linearna proporcionalnost između ovih veličina važi samo za *slaba polja*, jer samo tada je uređivanje dipola direktno srazmerno jačini električnog polja, dok u slučaju sve jačih polja polarizacija sve sporije raste i može težiti saturaciji, a može nastati i jonizacija. Najzad, gornja relacija kazuje da se radi o *lolanom dejstvu*, jer je vrednost jačine električne polarizacije u nekoj tački *M* u nekom trenutku t određena samo vrednošću jačine električnog polja u toj tački i u tom trenutku, a ne i vrednostima jačine polja u okolnim tačkama i u ranijim trenucima.

Ako je <u>*mterijalna sredina anizotropna*</u>, kao što su na pr. kristali, polarizacija sredine se vrši ne samo u pravcu električnih linija sila, već u svim pravcima ali sa raznim doprinosima u pojedinim pravcima. Iskustvo pokazuje da su u ovom slučaju *komponente jačine električne polarizacije linearne funkcije komponenata jačine električnog polja*

$$P_i = P_{i0} + \varepsilon_0 \sum_{k=1}^{3} \kappa_{ik} E_k, \quad (i = 1,2,3)\,, \tag{30}$$

gde smo radi konciznosti komponente vektora označili indeksima 1,2,3. Matematički to je ekvivalentno razvoju funkcija $P_i(E_1, E_2, E_3)$ u Makleronov red

$$P_i(E_1, E_2, E_3) = P(0,0,0) + \sum_{k=1}^{3} E_k \left(\frac{\partial P_i}{\partial E_k} \right)_0 + \ldots \tag{31}$$

a zbog pretpostavke o slabom polju veličine E_k biće male, te se mogu zanemariti viši članovi, čime dobijamo relacije gornjeg oblika. Ovde je najčešće $P_{i0} = 0$, tj. u odsustvu električnog polja nema ni polarizacije, ali ima sredina kod kojih je $P_{i0} \neq 0$, tj. gde ima zaostale polarizacije, to su tzv. *piroelektrici.*

Ako se ograničimo na ovaj slučaj, prema definiciji vektora električne indukcije

$$D_i = \varepsilon_0 E_i + P_i \tag{32}$$

vidimo da će tada *komponente vektora električne indukcije biti linearne homogene funkcije komponenata jačina električnog polja*

$$D_i = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ik} E_k \quad (i = 1,2,3) . \tag{33}$$

Odavde vidimo da u anizotropnim sredinama *vektori* $\mathbf{D}$ *i* $\mathbf{E}$ *više nisu kolinearni,* a dielektrična konstanta ima *tenzorski karakter.* Gornje relacije možemo napisati i u ekvivalentnom simboličkom obliku

$$\mathbf{D} = \hat{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}, \tag{34}$$

gde je $\hat{\varepsilon}$ tenzor dielektrične konstante sa komponentama ε_{ik}. Pri tome se pokazalo da je u slučaju termodinamičke ravnoteže u električnom polju ovaj tenzor *simetričan*, tj. $\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}$ i ima sve tri svojstvene vrednosti *pozitivne*, ali uprisustvu spoljašnjeg magnetnog polja situacija je složenija, tada je $\varepsilon_{ik}(-\mathbf{B}) = -\varepsilon_{ki}\,\mathbf{B}$.

Izvesne sredine, koje se pri relativno slabim poljima pokoravaju ovakvim relacijama, pri dovoljno jakim poljima pokazuju *nelinearno ponašanje*, na pr. oblika

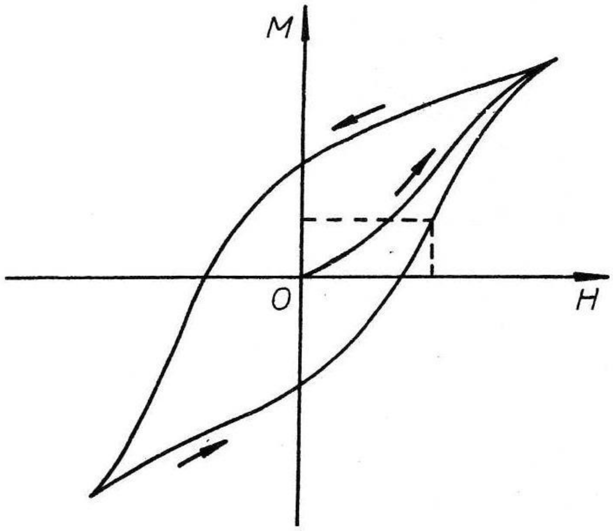
$$D_i = \sum_k \varepsilon_{ik}^{(1)} E_k + \sum_k \sum_l \varepsilon_{ikl}^{(2)} E_k E_l \ , \tag{35}$$

takav slučaj imammo na pr. kod lasera i na tome se bazira *nelinearna optika.* Slične rlacije važe i između magnetnih veličina $\mathbf{B}$ i $\mathbf{H}$, kao i između strujne gustine $\mathbf{j}_s$ i veličina $\mathbf{E}$ i $\mathbf{E}^{str}$ i ograničavajući se na slučaj linearnih relacija bez nezavisnog člana, imaćemo

$$B_i = \sum_{k=1}^{3} \mu_{ik} H_k, \;\; j_{si} = \sum_{k=1}^{3} \sigma_{ik} (E_k + E_k^{str}) , \tag{36}$$

gde su takođe svi koeficijenti μ_{ik} i σ_{ik} nenegativni. Napomenimo još da je anizotropija mnogo jače izražena kod električnih veličina, tako da se kod magnetnih u izvesnim slučajevima može zanemariti.

U slučaju *segnetoelektrika i feromagnetika* iksustvo pokazuje da jačina polarizacije nije više linearno srazmerna jačini električnog odnosno magnetnog polja. Na pr. za feromagnetike zavisnost $M = f(H)$ nije više čak ni jednoznačna funkcija i prikazana je zatvorenom petljom, ova pojava poznata je pod imenom *histerezis (Slika 1).*



Slika 1: Histerezis

U ovom slučaju pojmovi magnetne susceptibilnosti i permeabilnsoti gube smisao, jer su oni uvedeni pod pretpostavkom da je jačina magnetne polarizacije linearno srazmerna jačini magnetnog polja. Ako se ipak želi formalno sačuvati relacije (17) i (24), ovi pojmovi se moraju definisati kao

$$\chi \overset{def}{=} \frac{M}{H}, \qquad \mu \overset{def}{=} \frac{B}{H},$$

ali one zavise od H i gube smisao za $H=0$. Umesto njih katkad se operiše sa srednjom vrednosšću ovih veličina u ciklusu histrezisa, ali ima više smisla umesto njih uvesti veličine

$$\chi' \overset{def}{=} \frac{dM}{dH}, \qquad \mu' \overset{def}{=} \frac{dB}{dH}, \tag{37}$$

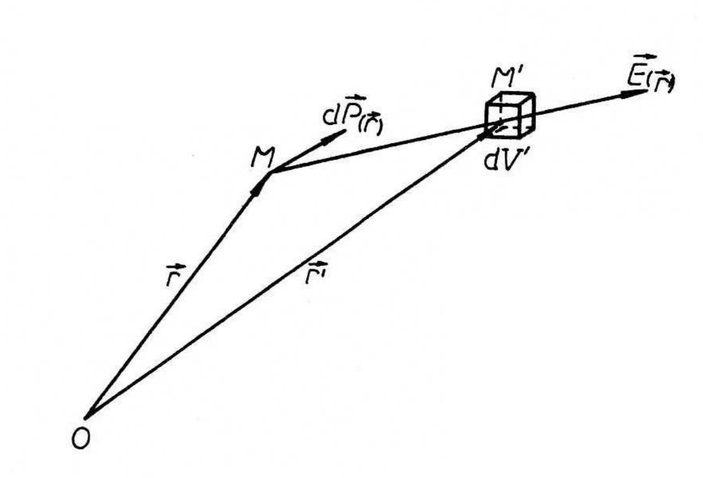
koje takođe zavise od H i daju nagib krivih $M = f(H)$ i $B = \phi(H)$ u posmatranoj tački. Ovako definisane veličine nazivaju se *diferencijalna susceptibilnost i diferencijalna permeabilnost* i iz ovih relacija neposredno proizilazi

$$\mathbf{M} = \oint \chi'(H)\, d\mathbf{H}, \qquad \mathbf{B} = \oint \mu'(H)\, d\mathbf{H}, \tag{38}$$

što u ovom slučaju može zameniti materijalne jednačine (21) i (24).

Ako *dejstvo polja nije lokalno*, kao na pr. kod visokofrekventnih pojava, jačina električne polarizacije u nekoj tački *M* neće više biti određena samo vrednošću jačine električnog polja u toj tački, već i njenim vrednostima u ostalim, pre svega susednim tačkama. Iskustvo pokazuje da je (Slika 2) *doprinos električnog polja u nekom elementu zapremine* dV' *ma kojoj komponenti jačine* *električne polarizacije* $\mathbf{P}$ *u tački M za homogene i anizotropne sredine pri relativno slabim poljima linearna funkcija komponenata jačine polja u ovom elementu kao i njegovoj zapremini*

$$dP_i(\mathbf{r},t) = \varepsilon_0 \sum_{k=1}^{3} \kappa_{ik}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\, E_k(\mathbf{r}')\, dV' \,. \tag{39}$$



Slika 2: Dejstvo polja nije lokalno.

Ovde faktori srazmernosti κ_{ik}, napisani po analogiji sa relacijom (30) za $P_{i0} = 0$, zavise od prirode sredine i njihovog relativnog vektora položaja i brzo opadaju sa udaljavanjem od tačke M. Ukupna jačina električne polarizacije u tački *M* biće jednaka zbiru svih doprinosa, tj.

$$P_i(\mathbf{r},t) = \varepsilon_0 \sum_{k=1}^{3} \int_V \kappa_{ik}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\, E_k(\mathbf{r}')\, dV' \,. \tag{40}$$

Tada će i veza između vektora električne indukcije i jačine električnog polja biti istog, integralnog tipa, tj.

$$D_i(\mathbf{r},t) = \sum_{k=1}^{3} \int_V \varepsilon_{ik}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\, E_k(\mathbf{r}')\, dV' \tag{41}$$

po analogiji sa relacijom (13).

Ukoliko je jezgro $\varepsilon_{ik}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ različito od nule samo u neposrednoj okolini δV tačke *M*, a u svim ostalim tačkama jednako nuli, integracija se svodi samo na oblast δV, gde možemo uzeti da je jačina električnog polja ista jednaka $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, pa dobijamo

$$D_i(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^{3} \mathbf{E}_k(\mathbf{r}) \int_{\delta V} \varepsilon_{ik}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\, dV' = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon'_{ik}(\mathbf{r})\, \mathbf{E}(\mathbf{r}) \,, \tag{42}$$

a to je jednačina oblika (17). Na sličan način, vrednost vektora $\mathbf{D}$ u nekom trenutku t ne mora biti određena samo jačinom električnog polja $\mathbf{E}$ u istom trenutku, već *i njenim vrednostima u svim* *ranijim trenutcima.*Usled toga i vrednost vektora $\mathbf{D}$ takođe zavisi i od vrednosti jačine polja $\mathbf{E}$ u svim ranijim trenutcima, što za relativno slaba polja možemo napisati u obliku

$$D_i(t) = \sum_{k=1}^{3} \int_{-\infty}^{t} \varepsilon_{ik}(t-t')\mathbf{E}_k(t')\,dt', \tag{43}$$

gde izraz po dzankom integrala predstavlja doprinos električnog polja u nekom intervalu vremena $(t, t+dt)$ vrednosti vektora električne indukcije u trenutku t. Slične relacije mogu se uspostaviti i između veličina $\mathbf{B}$ i $\mathbf{H}$, kao i između $\mathbf{j}_s$ i $\mathbf{E}+\mathbf{E}^{str}$.

4. Potpun sistem jendačina

Maksvelove jednačine za materijalne sredine i materijalne jednačine za sredine bez disperzije u slučaju slabih i niskofrekventnih polja, možemo napisati u tenzorskom obliku

$$\begin{aligned} &div\mathbf{D} = \rho, \qquad div\mathbf{B} = 0, \\ &rot\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad rot\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \\ &\mathbf{D} = \hat{\varepsilon}\mathbf{E}, \ \mathbf{B} = \hat{\mu}\mathbf{H}, \ \mathbf{j}_s = \hat{\sigma}\left(\mathbf{E}+\mathbf{E}^{str}\right). \end{aligned} \tag{44}$$

Ovim jednačinama odgovara sistem od *osam* skalarnih Maksvelovih jednačina i *devet* odgovarajućih skalarnih materijalnih jednačina. Gornji sistem jednačina predstavlja *potpun sistem jednačina elektrodinamike* i pri datim uslovima potpuno određuje elektromagnetno polje u posmatranoj materijalnoj sredini.

Za *homogene i izotropne sredine bez disperzije*, kad materijalne jednačine dobijaju oblik $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ i $\mathbf{j} = \sigma\left(\mathbf{E}+\mathbf{E}^{str}\right)$ sa skalarnim i konstantnim koeficijentima ε, μ i σ, možemo eliminisati ε i μ pomoću prve dve od ovih jednačina, čime se ovaj system svodi na

$$\begin{aligned} &div\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon}\rho, \qquad div\mathbf{B} = 0, \\ &rot\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad rot\mathbf{B} = \mu\mathbf{j} + \varepsilon\mu\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \\ &\mathbf{j}_s = \sigma\left(\mathbf{E}+\mathbf{E}^{str}\right). \end{aligned} \tag{44}$$

Ove jednačine imaju isti oblik kao i Maxwellove jednačine za vakuum, stoga smo ovakve sredine i nazvali vakuumu slične sredine. Odgovarajući sistem skalarnih jednačina sastoji se iz osam Maxwellovih jednačina i tri skalarne materijalne jednačine.

Ovaj sistem jednačina treba upotpuniti *diferencijalnim jednačinama kretanja naelektrisanih čestica u posmatranom elektromagnetnom polju*. Prema opštoj relativističkoj jednačini dinamike, diferencijalna jednačina kretanja nekog uošenog naelektrisanja $q_i \; (i=1,2,3,\ldots,N)$ ima oblik

$$\frac{d}{dt}\frac{m_0\mathbf{v}_i(t)}{\sqrt{1-v_i^2(t)/c^2}} = q_i\mathbf{E}(\mathbf{r}_i,t) + q_i\mathbf{v}_i(t)\times\mathbf{B}(\mathbf{r}_i,t)\,, \tag{45}$$

gde se sve veličine uzimaju u onoj tački polja gde se nalazi uočeno naelektrisanje q_i sa vektorom položaja $\mathbf{r}_i$ u trenutku t. Ovih jednačina ima toliko koliko ima naelektrisanja u posmatranoj oblasti i u njima sem jačina polja $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ figurišu i nove nepoznate veličine – vektori položaja $\mathbf{r}_i(t)$ svih ovih naelektrisanja.

Ukoliko ova naelektrisanja smatramo *tačkastim*, kao što zahteva teorija relativnosti, njihova prostorna gustina biće jednaka nuli svuda van ovih naelektrisanja, a beskonačna u tačkama gde se ona nalaze, što se može izraziti pomoću Dirakove delta funkcije

$$\rho(\mathbf{r},t) = \sum_i q_i\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i(t))\,. \tag{46}$$

Zaista, ako integralimo ovaj izraz po oblasti koja obuhvata sva posmatrana naelektrisanja, prema definiciji Diracove funkcije imaćemo

$$\int_V \rho(\mathbf{r},t)\,dV = \sum_i q_i \int_V \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)\,dV = \sum_i q_i\,, \tag{47}$$

kao i što treba da bude, pri čemu istaknimo da izrazi ovakvog tipa ustvari dobijaju smisao tek pri primeni u procesu integracije. Na sličan način može se izraziti strujna gustina ovih naelektrisanja

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = \sum_i q_i\mathbf{v}_i(t)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i(t))\,, \tag{48}$$

jer u svim tačkama van naelektrisanja (gde je $\rho=0$) ovaj izraz daje $\mathbf{j}_i(\mathbf{r}\neq\mathbf{r}_i)=0$, a u tački gde se nalazi neko od ovih naelektrisanja q_i biće $\rho(\mathbf{r}_i)=q_i\delta(0)$, pa gornji izraz dobija oblik

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}_i) = q_i\mathbf{v}_i\delta(0) = \rho(\mathbf{r}_i)\,\mathbf{v}_i\,, \tag{49}$$

u oba slučaja u saglasnosti sa definicijom strujne gustinje $\mathbf{j}=\rho\,\mathbf{v}$.